

平成25年度

9時00分～10時30分

数 学

問 題 用 紙 1 ～ 2 頁

解 答 用 紙 1 ～ 3 頁

注 意 事 項

1. 試験開始の合図〔チャイム〕があるまで、この注意をよく読むこと。
2. 試験開始の合図〔チャイム〕があるまで、この問題の印刷されている冊子を開かないこと。
3. 試験開始の合図〔チャイム〕の後に問題用紙ならびに解答用紙の定められた位置に受験番号、氏名を記入すること。
4. 解答はかならず定められた解答用紙を用い、それぞれ定められた位置に問題の指示に従って記入すること。
5. 解答はすべて黒鉛筆を用いてはっきりと読みやすく書くこと。
6. 質問は文字に不鮮明なものがあるときにかぎり許される。
7. 問題に、落丁、乱丁の箇所があるときは手をあげて交換を求めること。
8. 試験開始後60分以内および試験終了前10分間は、退場を認めない。
9. 試験終了の合図〔チャイム〕があったとき、ただちに筆記用具を置くこと。
10. 試験終了の合図〔チャイム〕の後は、問題用紙および解答用紙はすべて本表紙を上にして、通路側から解答用紙、問題用紙の順に並べて置くこと。いっさい持ち帰ってはならない。なお、途中退場の場合は、すべて裏返しにして置くこと。
11. その他、監督者の指示に従うこと。
12. 解答用紙の余白および裏面については計算に利用してもよい。

受験番号		氏 名	
------	--	-----	--



- 1 e を自然対数の底, b を実数として, 数列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) が条件(1)および(2)を満たしているとき, 設問〔1〕および〔2〕に答えなさい。

$$a_1 = \frac{e - e^2 + b}{1 - e} \quad (1)$$

$$a_{n+1} = ea_n + b \quad (2)$$

- 〔1〕 $b=11$ のとき, a_n を n の式で表すと,

$$a_n = \boxed{\text{①}} \text{ となる。}$$

また,

$$\sum_{k=1}^n \log_e \left(a_k + \frac{11}{e-1} \right) = \boxed{\text{②}} \text{ となる。}$$

- 〔2〕 $b=e^{11}$ のとき, $\sum_{k=1}^n a_k$ の値は $n = \boxed{\text{③}}$ のとき最小となる。

- 2 負の実数 a, b は, u についての 2 次方程式 $u^2 - su + t = 0$ の解で,

$a^3 + b^3 - 2ab = -4$ を満たしている。このとき, 設問〔1〕～〔3〕に答えなさい。

- 〔1〕 $a+b$, ab および $a^3 + b^3 - 2ab$ を s, t を用いて表すと,

$$a+b = \boxed{\text{①}}, \quad ab = \boxed{\text{②}}, \quad a^3 + b^3 - 2ab = \boxed{\text{③}}$$

となる。

- 〔2〕 以下の s, t に対する記述 (イ), (ロ), (ハ) のうち正しいものを選び, その記号を解答欄に記入しなさい。

(イ) s, t は $s > 0, t > 0, s^2 - 4t \geq 0$ を満たしている。

(ロ) s, t は $s < 0, t > 0, s^2 \geq 4t$ を満たしている。

(ハ) s, t は $s < 0, t > 0, s^2 < 4t$ を満たしている。

- 〔3〕 $a+b$ のとりうる値の範囲を求めなさい。



3 O を中心とする半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$,
 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおき, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ とする。線分 AB, BC, CA の中点を, それぞ
 れ P, Q, R とし, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{q}$, $\overrightarrow{OR} = \vec{r}$ とおく。

このとき, 以下の ① ~ ⑥ について適切な値を, イ には適切な式を
 解答欄に答えなさい。また, ア, ウ には下部の選択肢からもっともふさわしい
 ものを選択して, 解答欄に記入しなさい。

ベクトル $\vec{d} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ とすると,

$$|\vec{d} - \vec{p}| = |\vec{d} - \vec{q}| = |\vec{d} - \vec{r}| = \text{①}$$

となり, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$ によって定まる点 D は $\triangle PQR$ の ア となることがわかる。

いま, 線分 AB の長さを 1, 線分 AC の長さを $\sqrt{3}$ とし, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は, どの 2 つも平行
 ではないとする。このとき, 線分 BC の長さは ② であり, $\vec{a} \cdot \vec{c} = \text{③}$ である。
 また, $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と $\vec{c}$ で表すと, $\vec{b} = \text{イ}$ となる。

また, $\triangle PQR$ について, $\angle QPR$ の二等分線と辺 QR の交点を S とおき, $\overrightarrow{PS}$ を $\vec{a}$
 と $\vec{c}$ で表すと,

$$\overrightarrow{PS} = \text{④} \vec{a} + \text{⑤} \vec{c}$$

とかける。同様にして, $\angle PQR$ の二等分線と辺 PR の交点を T とおく。線分 PS と
 線分 QT の交点を U とおくと, U は $\triangle PQR$ の ウ となり,

$$\overrightarrow{OU} = \text{⑥} \vec{b}$$

となることがわかる。

選択肢		
重心,	内心,	外心

4 以下の命題が真であれば証明し, 偽であれば反例をあげて偽であることを説明し
 なさい。

[1] p を, 4 で割ると 3 余る素数とする。このとき, $2p+1$ は 3 の倍数であるか,
 または素数である。

[2] 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の成分と, A の逆行列 A^{-1} の成分がすべて整数であるとする。

このとき, $|ad - bc| = 1$ である。

